Tromsø
Romsa
Baltic Way 2022

Baltic Way

12. november 2022

Version: *Danish*

Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter.
I løbet af de første 30 minutter, må der stilles spørgsmål.
Kun skrive- og tegneredskaber er tilladt.

Opgave 1. Lad $\mathbb{R}_+$ betegne de positive reelle tal. Antag, at $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ er en funktion der opfylder ligningerne

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ og } f(2x) = f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}_+$. Find alle mulige værdier af $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$.

Opgave 2. Vi definerer en følge af naturlige tal ved startbetingelserne $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ og rekursionen

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

for alle $n \geq 3$. Find værdien af a_{2022}.

Opgave 3. Vi kalder et polynomium $P(x, y)$ i to variable for *skjult én-variabel*, hvis der findes polynomier $Q(x)$ og $R(x, y)$ så $\deg(Q) \geq 2$ og $P(x, y) = Q(R(x, y))$. F.eks. er $x^2 + 1$ og $x^2y^2 + 1$ begge skjult én-variabel, mens $xy + 1$ ikke er.

Bevis eller modbevis følgende påstand: Hvis $P(x, y)$ er et polynomium så $P(x, y)$ og $P(x, y) + 1$ begge kan skrives som et produkt af to ikke-konstante polynomier, da er P skjult én-variabel.

Note: Alle polynomier antages at have reelle koefficienter.

Opgave 4. Positive reelle tal x, y og z opfylder ligningen $xy + yz + zx = 1$. Bevis, at

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

Opgave 5. Lad $\mathbb{R}$ betegne de reelle tal. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder, at $f(0) + 1 = f(1)$ og

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3,$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 6. Mathias arrangerer en badmintonturnering for 40 spillere, hvor der spilles på 20 baner nummererede fra 1 til 20. Spillerne er fordelt med to på hver bane. Efter hver runde udpeges en vinder på hver bane. Taberen på bane 1 og vinderen på bane 20 bliver efterfølgende stående, mens de 38 resterende spillere flytter bane på følgende måde: Vinderen på bane i går til bane $i + 1$ mens taberen går til bane $i - 1$. Turneringen fortsætter indtil alle spillere har spillet mindst en gang mod hver af de andre spillere. Hvad er det mindste antal runder som turneringen kan vare?

Opgave 7. Forfatteren Arthur skriver bøger med $n \geq 1$ andre forfattere. Hver bog har en liste med forfattere der inkluderer Arthur, og ikke to bøger er skrevet af præcist de samme forfattere. Til en fest med forfatterne skriver alle, bortset fra Arthur, på en seddel, hvor mange bøger de kan huske at have skrevet sammen med Arthur. Efterfølgende inspektion af sedlerne viser, at de noterede tal er de første n Fibonacci tal (defineret ved $F_1 = F_2 = 1$ og $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). For hvilke n er det muligt, at ingen af Arthurs medforfattere har husket galt?

Opgave 8. For et naturligt tal $n \geq 3$ tegner vi $n-3$ indre diagonaler i en ikke-selvskærende n-kant (ikke nødvendigvis konveks). Diagonalerne opdeler n-kanten i $n-2$ trekanter. Vinklerne i alle trekanterne er naturlige tal, og ikke to vinkler er lige store. Hvad er den største værdi n kan have?

Opgave 9. Fem matematikere sidder rundt om et stort lejrbål. De ved, at Oluf vil sætte hatte på deres hoveder. En hat er enten rød, grøn, blå eller gul. Efter en tid med stille reflektion, skal de hver skrive en af de fire farver på en seddel. Hver matematiker kan kun se de to naboers hatte, men ikke deres egen hat, eller de sidste to matematikeres hatte. De kan heller ikke kommunikere efter at have fået hatte på hovederne. Vis, at matematikerne på forhånd kan udtænke en strategi, så højst to matematikere ender med at skrive farven på deres egen hat.

Opgave 10. Et naturligt tal a siges at være *indeholdt* i et naturligt tal b, hvis det er muligt, at få a ved at slette cifre i b (skrevet 10-talssystemet). F.eks. er 123 indeholdt i 901523, men ikke indeholdt i 3412.

Findes der en uendelig mængde af naturlige tal, så intet tal i mængden er indeholdt i et andet tal i mængden?

Opgave 11. Lad ABC være en trekant med omskreven cirkel Γ, og lad O betegne centrum for Γ. Cirklen med centrum på linjen AB gennem punkterne A og O skærer i punktet Γ i $D \neq A$. Cirklen med centrum på linjen AC gennem punkterne A og O skærer Γ i punktet $E \neq A$. Bevis, at BD er parallel med CE.

Opgave 12. En spidsvinklet trekant ABC har højderne AD, BE og CF (hvor D, E og F ligger på siderne BC, CA og AB henholdsvis). Lad Q være et indre punkt på linjestykket AD, og lad de omskrevne cirkler til trekanterne QDF og QDE skærer linjen BC i punkterne $X \neq D$ og $Y \neq D$, henholdsvis. Bevis, at $BX = CY$.

Opgave 13. Lad $ABCD$ være en indskrivelig firkant med $AB < BC$ og $AD < DC$. Lad E og F være punkter på siderne BC og CD, henholdsvis, så $AB = BE$ og $AD = DF$. Lad M betegne midtpunktet af linjestykket EF. Bevis, at $\angle BMD = 90°$.

Opgave 14. Lad ABC være en spidsvinklet trekant med omskreven cirkel Γ, og lad O betegne centrum for Γ. Lad M betegne midtpunktet af linjestykket BC. Lad T betegne Γ's andet skæringspunkt med linjen AM, og lad D betegne Γ's andet skæringspunkt med højden fra A. Lad desuden X betegne skæringspunktet mellem linjerne DT og BC. Lad endelig P betegne centrum for den omskrevne cirkel til trekant XDM. Bevis at den omskrevne cirkel til trekant OPD går gennem midtpunktet af XD.

Opgave 15. Lad Ω være en cirkel, og lad $B \neq C$ være to faste punkter på Ω. For et givet tredje punkt A på Ω betegner X og Y fodpunkterne for højderne fra B og C, henholdsvis, i trekant ABC. Bevis, at der findes en cirkel Γ så XY er tangent til Γ uanset hvordan A vælges.

Opgave 16. Lad $\mathbb{Z}_+$ betegne de positive hele tal. Find alle funktioner $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ der opfylder betingelsen

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

for alle $a, b \in \mathbb{Z}_+$.

Opgave 17. Lad n være et positivt helt tal, så summen af dets positive divisorer er mindst $2022n$. Bevis, at n har mindst 2022 forskellige primfaktorer.

Opgave 18. Find alle par (a, b) af positive hele tal så $a \leq b$ og

$$\gcd(x, a)\gcd(x, b) = \gcd(x, 20)\gcd(x, 22)$$

gælder for alle positive hele tal x.

Opgave 19. Find alle tripler (x, y, z) af ikke-negative hele tal, så

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Opgave 20. Ingrid og Erik spiller et spil. For et givet ulige primtal p skrives tallene $1, 2, 3, \ldots, p-1$ på en tavle. Spillerne foretager efter tur et træk og Ingrid starter. Et træk består i at markere et tal på tavlen der endnu ikke er blevet markeret. Hvis produktet af alle markerede tal efter et træk er $1 \pmod{p}$, får den spiller der har foretaget dette træk 1 point og ellers gives 0 point. Spillet stopper, når alle tal på tavlen er markerede. Spilleren med flest point vinder. Ved pointlighed er spillet uafgjort. For alle p bestem hvilken spiller (hvis nogen) der har en vindende strategi.