Balti Tee

12. november 2022

Version: *Estonian*

Lahendamiseks on aega 4 ½ tundi.
Esimese 30 minuti jooksul võib küsida küsimusi.
Ülesannete lahendamiseks on lubatud kasutada ainult kirjutus- ja joonestusvahendeid.

Ülesanne 1. Olgu $\mathbb{R}^+$ positiivsete reaalarvude hulk. Funktsioon $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ rahuldab iga $x \in \mathbb{R}^+$ korral võrdusi

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ ja } f(2x) = f(x).$$

Leia $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$ kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 2. Naturaalarvude jada on määratud seostega $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ja

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

iga $n \geqslant 3$ korral. Leia a_{2022}.

Ülesanne 3. Nimetame kahe muutuja polünoomi $P(x, y)$ *peidetult ühe muutuja polünoomiks*, kui leiduvad polünoomid $Q(x)$ ja $R(x, y)$ nii, et $\deg(Q) \geqslant 2$ ja $P(x, y) = Q(R(x, y))$ (näiteks $x^2 + 1$ ja $x^2y^2 + 1$ on peidetult ühe muutuja polünoomid, aga $xy + 1$ ei ole). Tõesta või lükka ümber järgmine väide: kui polünoomi $P(x, y)$ korral saab nii $P(x, y)$ kui $P(x, y) + 1$ esitada kahe mittekonstantse polünoomi korrutisena, siis P on tingimata peidetult ühe muutuja polünoom.

Märkus: Eeldame, et kõik polünoomid on reaalarvuliste kordajatega.

Ülesanne 4. Positiivsed reaalaarvud x, y, z rahuldavad tingimust $xy + yz + zx = 1$. Tõesta, et

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant 5.$$

Ülesanne 5. Olgu $\mathbb{R}$ positiivsete reaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nii et $f(0) + 1 = f(1)$ ning mistahes reaalarvude x ja y korral kehtib

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3.$$

Ülesanne 6. Kevin korraldab välkmaleturniiri, kus 40 mängijat mängivad 20 laual, mis on nummerdatud 1 kuni 20. Igal laual mängib üks mängijate paar ning igas voorus selgub igal laual võitja. Mängija, kes kaotab laual 1, ning mängija, kes võidab laual 20, jäävad oma kohtadele. Iga ülejäänud mängija liigub laualt i lauale $i + 1$, kui ta võitis, ning lauale $i - 1$, kui ta kaotas. Turniir lõpeb, kui iga mängija on mänginud iga teise mängijaga vähemalt ühe korra. Mis on vähim voorude arv, mida turniir saab kesta?

Ülesanne 7. Kirjanik Arthuril on $n \geqslant 1$ sõpra, kes kirjutavad koos temaga raamatuid. Igal raamatul on autorite hulk, mis sisaldab ka Arthurit ennast. Ühelgi kahel raamatul pole sama autorite hulk. Peol kõigi kaasautoritega paneb igaüks neist mälu järgi kirja, mitu raamatut ta on koos Arthuriga kirjutanud. Uurides kirjutatud arve, nad avastavad, et need on n esimest Fibonacci arvu ($F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). Milliste n väärtuste korral on võimalik, et keegi ei mäletanud valesti?

Ülesanne 8. Olgu $n \geqslant 3$ naturaalarv. Ennast mitte lõikavas, kuid mitte tingimata kumeras n-nurgas tõmmatakse $n - 3$ sisemist diagonaali, mis jagavad n-nurga $n - 2$ kolmnurgaks. On teada, et kõigis kolmnurkades on kõigi sisenurkade suurused kraadides positiivsed täisarvud, kusjuures ükski kaks nurka ei ole võrdsed. Mis on arvu n suurim võimalik väärtus?

Ülesanne 9. Viis tarka istuvad lõkke ümber. Mingi hetk asetab Oluf neist igaühe pähe mütsi, mis on kas punane, roheline, sinine või kollane. Pärast mõttepausi peab iga tark kirjutama paberilipikule ühe neljast värvist. Targad näevad vaid enda naabrite mütse, mitte enda ega ülejäänud kahe targa omi, samuti ei saa nad enam omavahel suhelda, kui Oluf hakkab neile mütse pähe asetama. Tõesta, et targad saavad eelnevalt leppida kokku strateegia, et maksimaalselt kaks neist kirjutaks üles omaenda mütsi värvi.

Ülesanne 10. Ütleme, et naturaalarv a *sisaldub* naturaalarvus b, kui arvu a kümnendesitus on võimalik saada arvu b kümnendesitusest numbrite kustutamisel. Näiteks 123 sisaldub arvus 901523, kuid mitte arvus 3412. Kas leidub lõpmatu hulk naturaalarve, nii et ükski arv selles hulgas ei sisaldu üheski teises arvus?

Ülesanne 11. Olgu ABC kolmnurk ning Γ tema ümberringjoon keskpunktiga O. Ringjoon, mille keskpunkt on sirgel AB ja mis läbib punkte A ja O, lõikub ringjoonega Γ teist korda punktis D. Ringjoon, mille keskpunkt on sirgel AC ja mis läbib punkte A ja O, lõikub ringjoonega Γ teist korda punktis E. Tõesta, et $BD \parallel CE$.

Ülesanne 12. Teravnurkses kolmnurgas ABC on tõmmatud kõrgused AD, BE ja CF. Olgu Q lõigu AD sisepunkt. Olgu kolmnurkade QDF ja QDE ümberringjoonte teised lõikepunktid sirgega BC vastavalt X ja Y. Tõesta, et $BX = CY$.

Ülesanne 13. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk, mis rahuldab tingimusi $AB < BC$ ja $AD < DC$. Olgu E ja F sellised punktid vastavalt nelinurga külgedel BC ja CD, et $AB = BE$ ja $AD = DF$. Olgu M lõigu EF keskpunkt. Tõesta, et $\angle BMD = 90^\circ$.

Ülesanne 14. Olgu ABC teravnurkne kolmnurk, Γ tema ümberringjoon keskpunktiga O ning M külje BC keskpunkt. Olgu T sirge AM ja Γ teine lõikepunkt ning D kolmnurgas ABC tipust A tõmmatud kõrguse ja Γ teine lõikepunkt. Sirged DT ja BC lõikuvad punktis X. Olgu P kolmnurga XDM ümberringjoone keskpunkt. Tõesta, et kolmnurga OPD ümberringjoon läbib lõigu XD keskpunkti.

Ülesanne 15. Olgu Ω ringjoon ja $B \neq C$ kaks fikseeritud punkti sellel. Ringjoonel Ω valitakse kolmas punkt A. Olgu X ja Y kolmnurgas ABC vastavalt tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Tõesta, et leidub selline ringjoon Γ, et sõltumata punkti A valikust puutub sirge XY ringjoont Γ.

Ülesanne 16. Olgu $\mathbb{Z}^+$ positiivsete täisarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, mis rahuldavad kõigi $a, b \in \mathbb{Z}^+$ korral tingimust

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2.$$

Ülesanne 17. Olgu n positiivne täisarv, mille positiivsete jagajate summa on vähemalt $2022n$. Tõesta, et arvul n on vähemalt 2022 erinevat algtegurit.

Ülesanne 18. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (a, b), nii et $a \leqslant b$ ning kõigi positiivsete täisarvude x korral kehtib

$$\text{SÜT}(x, a)\text{SÜT}(x, b) = \text{SÜT}(x, 20)\text{SÜT}(x, 22).$$

Ülesanne 19. Leia kõik mittenegatiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Ülesanne 20. Olgu p paaritu algarv. Tahvlil on arvud $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Richard ja Kaarel mängivad mängu, tehes kordamööda käike, kusjuures Richard alustab. Käik koosneb tahvlile kirjutatud mahatõmbamata arvu valimisest ning selle mahatõmbamisest. Kui pärast mingit käiku on kõiki mahatõmmatud arvude korrutis 1 (mod p), saab mängija, kelle käik oli, ühe punkti, vastasel juhul ei saa keegi punkte. Mäng lõpeb, kui kõik arvud on maha tõmmatud. Võidab mängija, kellel on mängu lõpus rohkem punkte. Kui neil on punkte võrdselt, jääb mäng viiki. Leia iga p korral, kummal mängijal (kui üldse kummalgi) leidub võitev strateegia.