Baltian tie

12. 11. 2022

Version: *Finnish*

Koeaika: 4 tuntia ja 30 minuuttia.
Kysymyksiä saa kysyä ensimmäisen 30 minuutin ajan.
Vain kirjoitus- ja piirtovälineet ovat sallittuja.

Tehtävä 1. Merkitään symbolilla $\mathbb{R}^+$ positiivisten reaalilukujen joukkoa. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ kuvaus, joka toteuttaa yhtälöt

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ ja } f(2x) = f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^+$. Etsi luvun $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$ kaikki mahdolliset arvot.

Tehtävä 2. Määritellään luonnollisten lukujen jono niin, että sillä on alkuarvot $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ja se toteuttaa kaikilla $n \geq 3$ rekursioyhtälön

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor .$$

Etsi luvun a_{2022} arvo.

Tehtävä 3. Kutsuttakoon kahden muuttujan polynomia $P(x, y)$ *salaisesti yksipaikkaiseksi*, jos on olemassa polynomit $Q(x)$ ja $R(x, y)$, joille $\deg(Q) \geq 2$ ja $P(x, y) = Q(R(x, y))$. (Esimerkiksi $x^2 + 1$ ja $x^2y^2 + 1$ ovat salaisesti yksipaikkaisia, mutta $xy + 1$ ei.)

Todista tai kumoa seuraava väite: Jos $P(x, y)$ on sellainen polynomi, että sekä polynomin $P(x, y)$ että polynomin $P(x, y) + 1$ voi kirjoittaa kahden ei-vakion polynomin tulona, niin P on salaisesti yksipaikkainen.

Huom! Kaikkien polynomien oletetaan olevan reaalikertoimisia.

Tehtävä 4. Positiiviset reaaliluvut x, y ja z teotuttavat yhtälön $xy + yz + zx = 1$. Todista, että

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

Tehtävä 5. Olkoon $\mathbb{R}$ kaikkien reaalilukujen joukko. Määritä kaikki kuvaukset $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille $f(0)+1 = f(1)$ ja

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3,$$

kun x ja y ovat reaalilukuja.

Tehtävä 6. Matti järjestää sulkapalloturnauksen 40 pelaajalle 20 kentällä, jotka on numeroitu yhdestä kahteenkymmeneen. Pelaajat sijoitetaan kentille niin, että jokaiselle kentälle tulee 2 pelaajaa. Jokaisella kierroksella voittaja määräytyy jokaisella kentällä. Kierroksen jälkeen kentällä 1 hävinnyt ja kentällä 20 voittanut jäävät paikoilleen. 38 muusta pelaajasta kentällä i voittanut siirtyy kentälle $i + 1$ ja hävinnyt kentälle $i - 1$. Turnaus jatkuu, kunnes jokainen pelaaja on pelannut jokaista muuta vastaan ainakin kerran. Mikä on pienin määrä kierroksia, jonka turnaus voi kestää?

Tehtävä 7. Kirjailijalla Arthur on $n \geq 1$ kirjailijakumppania, jotka kirjoittavat hänen kanssaan kirjoja. Jokaisella kirjalla on useita tekijöitä Arthur mukaan lukien. Millään kahdella kirjalla ei ole samoja tekijöitä. Eräässä juhlassa Arthurin kirjailijakumppaneista kukin kirjoittaa lapulle Arthurin kanssa kirjoittamiensa kirjojen lukumäärän muistinsa mukaan. Tutkittuaan lappuja kirjailijakumppanit huomaavat, että kirjatut luvut ovat n ensimmäistä Fibonaccin lukua (jotka määritellään yhtälöillä $F_1 = F_2 = 1$ ja $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). Millä n on mahdollista, että ketään kirjailijakumppaneista ei vaivaa muistinmenetys?

Tehtävä 8. Olkoon $n \geq 3$ luonnollinen luku. Monikulmioon, jossa on n kärkeä ja joka ei ole itseään leikkaava mutta ei myöskään välttämättä kupera, piirretään $n-3$ monikulmion sisällä kulkevaa lävistäjää, jotka jakavat sen $n-2$ kolmioksi. Tiedetään, että jokaisen tällaisen kolmion jokaisen kulman suuruus asteissa on luonnollinen luku ja että kaikki nämä luvut ovat eri lukuja. Mikä on luvun n suurin mahdollinen arvo?

Tehtävä 9. Viisi tietäjää istuu suuren nuotion ympärillä. He tietävät, että Oluf tulee laittamaan jokaisen tietäjän päähän värillisen hatun, jonka väri on yksi neljästä väristä: punainen, vihreä, sininen tai keltainen. Lyhyen hiljaisen harkinnan jälkeen jokaisen tietäjän tulee kirjoittaa yksi näistä väreistä paperinpalalle. Jokainen tietäjä tulee näkemään ainoastaan kahden naapurinsa hatut, ei omaansa eikä kahden jäljelle jäävän tietäjän hattuja, eivätkä he saa kommunikoida keskenään sen jälkeen, kun Oluf alkaa laittaa hattuja heidän päähänsä. Osoita, että tietäjät voivat suunnitella etukäteen strategian, jota käyttäen korkeintaan kaksi tietäjää kirjoittaa paperilapulle oman hattunsa värin.

Tehtävä 10. Luonnollisen luvun a sanotaan *sisältyvän* luonnolliseen lukuun b, jos luvun a voi muodostaa pyyhkimällä jotkin luvun b numeroista. Esimerkiksi: 123 sisältyy lukuun 901523, mutta ei sisälly lukuun 3412.

Onko olemassa sellaista ääretöntä luonnollisten lukujen joukkoa, että mikään tämän joukon alkio ei sisälly toiseen tämän joukon alkioon?

Tehtävä 11. Olkoon ABC kolmio, jonka ympärysmpyrä on Γ ja ympärysympyrän keskipiste on O. Ympyrä, joka kulkee pisteiden A ja O kautta ja jonka keskipiste on suoralla AB, leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä D. Vastaavasti ympyrä, joka kulkee pisteiden A ja O kautta ja jonka keskipiste on suoralla AC, leikkaa ympyrän Γ uudelleen pisteessä E. Todista, että suora BD on yhtensuuntainen suoran CE kanssa.

Tehtävä 12. Teräväkulmaisella kolmiolla ABC on korkeusjanat AD, BE ja CF (jossa D, E ja F ovat sivuilla BC, CA ja AB vastaavasti). Olkoon Q janan AD sisäpiste ja leikatkoot kolmioiden QDF ja QDE ympärysympyrät suoran BC uudelleen pisteissä X ja Y vastaavasti. Todista, että $BX = CY$.

Tehtävä 13. Olkoon $ABCD$ jännenelikulmio, jossa $AB < BC$ ja $AD < DC$. Olkoot E ja F pisteitä sivuilla BC ja CD vastaavasti niin, että $AB = BE$ ja $AD = DF$. Olkoon lisäksi M janan EF keskipiste. Todista, että $\measuredangle BMD = 90°$.

Tehtävä 14. Kolmiossa ABC olkoot Γ ympärysympyrä, O ympärysympyrän keskipiste ja M sivun BC keskipiste.

Olkoot T ympyrän Γ ja suoran AM toinen leikkauspiste ja D ympyrän Γ ja pisteestä A lähtevän korkeusjanan toinen leikkauspiste. Olkoon lisäksi X suorien DT ja BC leikkauspiste. Olkoon P kolmion XDM ympärysympyrän keskipiste. Todista, että kolmion OPD ympärysympyrä kulkee janan XD keskipisteen kautta.

Tehtävä 15. Olkoon Ω ympyrä ja $B \neq C$ kaksi kiinnitettyä pistettä ympyrällä Ω. Jos A on kolmas piste ympyrällä Ω, niin olkoot X ja Y pisteistä B ja C lähtevien korkeusjanojen kantapisteet vastaavasti. Todista, että on olemassa sellainen ympyrä Γ, jolla XY sivuaa ympyrää Γ pisteen A valinnasta huolimatta.

Tehtävä 16. Olkoon $\mathbb{Z}^+$ positiivisten kokonaislukujen joukko. Etsi kaikki funktiot $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, joilla

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Tehtävä 17. Olkoon n positiivinen kokonaisluku, jonka positiivisten tekijöiden summa on vähintään $2022n$. Todista, että luvulla n on ainakin 2022 eri alkutekijää.

Tehtävä 18. Etsi kaikki positiivisten kokonaislukujen parit (a,b), joilla $a \leq b$ ja

$$\operatorname{syt}(x,a)\operatorname{syt}(x,b) = \operatorname{syt}(x,20)\operatorname{syt}(x,22)$$

pätee kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla x.

Tehtävä 19. Etsi kaikki epänegatiivisten kokonaislukujen kolmikot (x,y,z), joilla

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Tehtävä 20. Inkeri ja Erkki pelaavat peliä. Luvut $1, 2, 3, \ldots, p-1$ on kirjoitettu liitutaululle, missä p on pariton alkuluku. Pelaajat tekevät siirtoja vuorotellen ja Inkeri aloittaa. Yksi siirto koostuu siitä, kun pelaaja yliviivaa sellaisen luvun taululta, jota ei ole vielä yliviivattu. Jos siirron jälkeen kaikkien yliviivattujen lukujen tulo on $1 \pmod{p}$, niin siirron tehnyt pelaaja saa yhden pisteen. Muulloin pelaaja ei saa yhtään pisteitä. Peli loppuu, kun kaikki luvut ovat yliviivattuja.

Pelin lopussa eniten pisteitä saanut pelaaja voittaa. Jos pelaajilla on yhtä paljon pisteitä, niin peli loppuu tasapeliin. Selvitä jokaisella p kummalla (jos kummallakaan) pelaajalla on voittostrategia.