Tromsø
Romsa
Baltic Way 2022

Baltic Way

12. November 2022

Version: *German*

Arbeitszeit: 4,5 Stunden
Fragen können während der ersten 30 Minuten gestellt werden.
Es sind außer Schreib– und Zeichengeräten keine Hilfsmittel erlaubt.

Problem 1. Sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Wir nehmen an, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die Gleichungen

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ und } f(2x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^+$ erfüllt. Man bestimme alle möglichen Werte von $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$.

Problem 2. Wir definieren eine Folge natürlicher Zahlen durch die Anfangswerte $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

für alle $n \geq 3$. Man bestimme den Wert von a_{2022}.

Problem 3. Wir nennen ein Polynom $P(x, y)$ von zwei Variablen *heimlich einvariablig*, wenn es Polynome $Q(x)$ und $R(x, y)$ gibt mit Grad $\deg(Q) \geq 2$ und $P(x, y) = Q(R(x, y))$. (Zum Beispiel sind $x^2 + 1$ und $x^2y^2 + 1$ heimlich einvariablig, aber $xy + 1$ nicht.)

Man beweise oder widerlege die folgende Aussage: Wenn $P(x, y)$ ein Polynom ist, für das sowohl $P(x, y)$ als auch $P(x, y) + 1$ als Produkt zweier nicht-konstanter Polynome geschrieben werden können, dann ist P heimlich einvariablig.

Bemerkung: Alle Polynome sollen reelle Koeffizienten haben.

Problem 4. Die positiven reellen Zahlen x, y und z erfüllen $xy + yz + zx = 1$. Man beweise, dass

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

Problem 5. Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0)+1 = f(1)$, sodass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3.$$

Problem 6. Mattis organisiert ein Badminton–Turnier für 40 Spieler, das auf 20 Plätzen ausgetragen wird, die mit den Zahlen 1 bis 20 nummeriert sind. In jeder Runde spielen auf jedem Platz zwei Spieler, von denen einer das Spiel gewinnt. Danach bleiben der Spieler, der auf Platz 1 verloren hat und der Spieler, der auf Platz 20 gewonnen hat, auf diesen Plätzen. Für die restlichen 38 Spieler gilt: Der Sieger von Platz i spielt anschließend auf Platz $i + 1$ und der Verlierer von Platz i auf Platz $i - 1$. Das Turnier dauert so lange, bis jeder Spieler gegen jeden anderen mindestens einmal gespielt hat. Was ist die kleinstmögliche Anzahl von Runden, die ein solches Turnier haben kann?

Problem 7. Der Schriftsteller Arthur hat $n \geq 1$ Koautoren, die gemeinsam mit ihm Bücher schreiben. Jedes Buch hat eine Liste von Autoren, die Arthur einschließt. Keine zwei Bücher haben dieselbe Autorenliste. Auf einer Party mit all seinen Koautoren schreibt jeder Koautor auf einen Zettel, wie viele Bücher er (soweit er sich noch erinnern kann) gemeinsam mit Arthur geschrieben hat. Als sie diese Zettel vergleichen, stellen sie fest, dass die aufgeschriebenen Zahlen die ersten n Fibonacci–Zahlen sind (definiert durch $F_1 = F_2 = 1$ und $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). Für welche n ist es möglich, dass sich alle Koautoren korrekt erinnert haben?

Problem 8. Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Ein nicht–überschlagenes, aber nicht notwendigerweise konvexes, n–Eck ist durch $n-3$ innere Diagonalen in $n-2$ Dreiecke zerlegt. Es ist bekannt, dass die Werte (in Grad) der Größen der Innenwinkel dieser Dreiecke alles natürliche Zahlen sind und dass keine zwei dieser Innenwinkel gleich groß sind. Was ist der größtmögliche Wert von n?

Problem 9. Fünf Weise sitzen um ein großes Lagerfeuer herum. Sie wissen, dass Oluf jedem von ihnen einen Hut aufsetzen wird, der eine von vier Farben (rot, grün, blau, gelb) haben wird. Dann wird nach einer Zeit des Nachdenkens jeder Weise eine der vier Farben auf einen Zettel schreiben müssen. Jeder Weise wird nur in der Lage sein, die Farben der Hüte seiner zwei Nachbarn zu sehen, aber nicht die Farbe des eigenen Hutes und auch nicht die Farben der Hüte der restlichen zwei Weisen. Sie werden auch nicht mehr miteinander kommunizieren können, sobald Oluf beginnt, die Hüte aufzusetzen. Man zeige, dass die Weisen im Vorfeld eine Strategie entwickeln können, die sicherstellt, dass höchstens zwei Weise die Farbe ihres eigenen Hutes aufschreiben werden.

Problem 10. Wir sagen, dass eine natürliche Zahl a in der natürlichen Zahl b *enthalten* ist, falls es möglich ist, a aus b durch Streichen von Ziffern zu erhalten (alle Zahlen werden in ihrer Dezimaldarstellung betrachtet). Zum Beispiel ist 123 enthalten in 901523, aber nicht in 3412.

Gibt es eine unendliche Menge natürlicher Zahlen, sodass keine Zahl dieser Menge in einer anderen Zahl dieser Menge enthalten ist?

Problem 11. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis Γ und Umkreismittelpunkt O. Der Kreis mit Mittelpunkt auf der Geraden AB, der durch A und O verläuft, schneidet Γ außerdem in D. In gleicher Weise schneidet der Kreis mit Mittelpunkt auf der Geraden AC, der durch A und O verläuft, den Kreis Γ außerdem in E. Man beweise, dass BD parallel zu CE ist.

Problem 12. Ein spitzwinkliges Dreieck ABC hat die Höhen AD, BE und CF (wobei D, E und F auf den Seiten BC, CA bzw. AB liegen). Es sei Q ein innerer Punkt der Strecke AD. Die Umkreise der Dreiecke QDF und QDE schneiden die Gerade BC außerdem in den Punkten X bzw. Y. Man beweise, dass $|BX| = |CY|$.

Problem 13. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit $|AB| < |BC|$ und $|AD| < |DC|$. Seien E und F Punkte auf den Seiten BC bzw. CD, sodass $|AB| = |BE|$ und $|AD| = |DF|$. Weiterhin sei M der Mittelpunkt der Strecke EF. Man beweise, dass $\angle BMD = 90°$.

Problem 14. Sei Γ der Umkreis und O der Umkreismittelpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC und sei M der Mittelpunkt der Strecke BC.

Es sei T der zweite Schnittpunkt von Γ und der Geraden AM, und D sei der zweite Schnittpunkt von Γ und der Höhe zum Eckpunkt A. Weiterhin sei X der Schnittpunkt der Geraden DT und BC. Sei P der Umkreismittelpunkt des Dreiecks XDM. Man beweise, dass der Umkreis des Dreiecks OPD durch den Mittelpunkt der Strecke XD geht.

Problem 15. Auf einem Kreis Ω werden zwei Punkte $B \neq C$ festgelegt. Für einen dritten Punkt A auf Ω seien X und Y die Fußpunkte der Höhen zu den Ecken B bzw. C im Dreieck ABC. Man beweise, dass es einen Kreis Γ gibt, sodass die Gerade XY eine Tangente von Γ ist, unabhängig von der Wahl des Punktes A auf Ω.

Problem 16. Sei $\mathbb{Z}^+$ die Menge der positiven ganzen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, die die Bedingung

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

für alle $a, b \in \mathbb{Z}^+$ erfüllen.

Baltic Way

12. November 2022

Version: *German*

Problem 17. Es sei n eine positive ganze Zahl, für die die Summe ihrer positiven Teiler mindestens $2022n$ ist. Man beweise, dass n mindestens 2022 verschiedene Primfaktoren besitzt.

Problem 18. Man bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen mit $a \leq b$, sodass

$$\mathrm{ggT}(x, a)\mathrm{ggT}(x, b) = \mathrm{ggT}(x, 20)\mathrm{ggT}(x, 22)$$

für jede positive ganze Zahl x gilt.

Problem 19. Man bestimme alle Tripel (x, y, z) nichtnegativer ganzer Zahlen mit

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Problem 20. Ingrid und Erik spielen ein Spiel. Für eine gegebene ungerade Primzahl p werden die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ auf eine Tafel geschrieben. Die Spieler ziehen abwechselnd, wobei Ingrid beginnt. Ein Zug besteht darin, dass der Spieler eine der Zahlen auf der Tafel durchstreicht, die vorher noch nicht durchgestrichen wurde. Wenn nach dem Zug das Produkt aller durchgestrichenen Zahlen kongruent zu 1 modulo p ist, erhält der Spieler, der zuletzt gezogen hat, einen Punkt. Anderenfalls wird kein Punkt vergeben. Das Spiel endet, wenn alle Zahlen durchgestrichen sind. Wer am Ende die meisten Punkte hat, gewinnt das Spiel. Haben beide gleich viele Punkte, endet das Spiel unentschieden. Man bestimme für jedes p, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat, sofern es einen solchen Spieler gibt.