Baltic Way

12. nóvember 2022

Version: *Icelandic*

Tímamörk: 4½ klukkustund.
Spurningar eru leyfðar fyrstu 30 mínúturnar.
Einungis skriffæri og teikniáhöld eru leyfð.

Dæmi 1. Látum $\mathbb{R}^+$ tákna mengi jákvæðra rauntalna. Gerum ráð fyrir að $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sé fall sem fullnægir

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ og } f(2x) = f(x)$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}^+$. Finnið öll gildi sem $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$ getur tekið.

Dæmi 2. Skilgreinum runu af náttúrlegum tölum með upphafsgildunum $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ og rakningunni

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

fyrir öll $n \geq 3$. Finnið gildið á a_{2022}.

Dæmi 3. Við köllum margliðu $P(x, y)$ í tveimur breytum *leynilega einnar breytu*, ef til eru margliður $Q(x)$ og $R(x, y)$ þannig að $\deg(Q) \geq 2$ og $P(x, y) = Q(R(x, y))$ (til dæmis eru $x^2 + 1$ og $x^2y^2 + 1$ leynilega einnar breytu, en ekki $xy + 1$).

Sannið eða hrekið eftirfarandi staðhæfingu: Ef $P(x, y)$ er margliða þannig að $P(x, y)$ og $P(x, y) + 1$ megi rita sem margfeldi tveggja margliða sem eru ekki fastar, þá er P leynilega einnar breytu.

Athugið: Gert er ráð fyrir að allar margliðurnar hafi rauntölustuðla.

Dæmi 4. Jákvæðar rauntölur x, y og z fullnægja $xy + yz + zx = 1$. Sannið að

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1}\right) \geq 5.$$

Dæmi 5. Látum $\mathbb{R}$ tákna mengi rauntalna. Ákvarðið öll föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að $f(0) + 1 = f(1)$ og fyrir allar rauntölur x og y gildi

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3.$$

Dæmi 6. Matti heldur badminton mót fyrir 40 leikmenn sem spilaðir eru á 20 völlum, merktum með tölunum 1 til 20. Leikmennir eru settir á vellina, tveir á hvern völl. Í hverri umferð er spilað til sigurs á hverjum velli. Eftir hverja umferð mun leikmaðurinn sem tapaði á velli 1 og leikmaðurinn sem vann á velli 20 ekki færa sig. Um hina 38 keppendurnar gildir að leikmaðurinn sem vann á velli i færir sig á völl $i + 1$ og leikmaðurinn sem tapaði á velli i færir sig á völl $i - 1$. Mótið heldur áfram þar til allir leikmennirnir hafa leikið við alla hina að minnsta kosti einu sinni. Hver er minnsti fjöldi umferða sem mótið getur tekið?

Dæmi 7. Rithöfundurinn Artúr hefur $n \geq 1$ meðhöfunda sem hann skrifar bækur með. Hver bók hefur lista af rithöfundum að Artúri meðtöldum. Engar tvær bækur hafa sama mengi af rithöfundum. Í samkomu með öllum meðhöfundum hans, skrifar hver meðhöfundur niður fjölda bóka sem hann man eftir að hafa skrifað með Artúri. Þegar tölurnar sem skrifaðar hafa verið niður eru skoðaðar, þá kemur í ljós að þær eru fyrstu n Fibonacci tölurnar (skilgreindar með $F_1 = F_2 = 1$ og $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). Fyrir hvaða n getur hugsast að engum meðhöfundanna hafi misminnt.

Dæmi 8. Fyrir náttúrlega tölu $n \geq 3$, þá drögum við $n - 3$ innri hornalínur, í marghyrningi sem sker ekki sjálfan sig, en þarf ekki endilega að vera kúptur. Þær skera hann niður í $n - 2$ þríhyrninga. Þekkt er að stærðir hornanna (mældar í gráðum) í þríhyrningunum eru ólíkar náttúrlegar tölur. Hvað getur n mest verið.

Dæmi 9. Fimm öldungar sitja umhverfis stórt bál. Þeir vita að Ólafur mun setja hatta sem hafa einn af fjórum litum (rauðum, grænum, bláum eða gulum) á höfuð hvers öldungs. Eftir stutta hljóða umhugsun þá munu öldungarnir skrifa á miða, einn af litunum fjórum. Hver öldungur mun aðeins geta séð liti hatta þeirra tveggja sem sitja við hliðina á honum, en ekki liti hatta hinna tveggja né lit síns eigins. Þeir mega ekki hafa samskipti sín á milli eftir að Ólafur setur hattana á þá.

Sýnið að öldungarnir geti komið sér saman um áætlun þannig að í mesta lagi tveir öldunganna skrifi lit eigins hatts.

Dæmi 10. Náttúrleg tala a er sögð vera *geymd* í náttúrlegri tölu b ef unnt er að mynda a með því að stroka út tölustafi í b, (tölurnar eru í skrifaðar í tugakerfi). Til dæmis er 123 geymd í 901523, en er ekki geymd í 3412.

Er til óendanlegt mengi af náttúrlegum tölum þannig að enginn talnanna sé geymd í nokkurri annarri tölu í menginu.

Dæmi 11. Látum ABC vera þríhyrning með umhring Γ og ummiðju O. Hringurinn sem liggur um punkta A og O og hefur miðju á línunni AB, sker Γ aftur í D. Á sama hátt sker hringurinn um A og O með miðju á línunni AC hringinn Γ aftur í E. Sýnið að línan BD sé samsíða línunni CE.

Dæmi 12. Hvasshyrndur þríhyrningur ABC hefur hæðir AD, BE og CF (þar sem D, E og F liggja á hliðunum BC, CA og AB, í þessari röð). Látum Q vera innri punkt striksins AD og látum umhringi þríhyrninganna QDF og QDE skera línuna BC aftur í punktum X og Y, í þessari röð. Sýnið að $|BX| = |CY|$

Dæmi 13. Látum $ABCD$ vera rásaðan ferhyrning með $|AB| < |BC|$ og $|AD| < |DC|$. Látum E og F vera punkta á hliðunum BC og CD, í þessari röð, þannig að $|AB| = |BE|$ og $|AD| = |DF|$. Ennfremur látum við M vera miðpunkt striksins EF. Sannið að hornið $\angle BMD$ sé rétt.

Dæmi 14. Látum Γ vera umhring hvasshyrnda þríhyrningsins ABC og O vera miðju hans. Látum M vera miðpunkt striksins BC.

Látum T vera hinn skurðpunkt Γ við línuna AM og látum D vera hinn skurðpunkt Γ við hæðarlínuna frá A. Látum einnig X vera skurðpunkt línanna DT og BC. Látum P vera ummiðju þríhyrningsins XDM. Sannið að umhringur þríhyrningsins OPD liggi um miðpunkt strikins XD.

Dæmi 15. Látum Ω vera hring og B og C vera ólíka fasta punkta á Ω. Fyrir gefinn punkt A á Ω, látum við X og Y vera fótpunkta hæðanna frá B og C í þríhyrningi ABC, í þessari röð. Sannið að til sé hringur Γ þannig að línan XY sé snertill við Γ óháð valinu á punktinum A.

Dæmi 16. Látum $\mathbb{Z}^+$ tákna mengi jákvæðra heiltalna. Finnið öll föll $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sem fullnægja

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

fyrir öll $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Dæmi 17. Látum n vera jákvæða heiltölu þannig að summa allra jákvæðra deila hennar sé að minnsta kosti $2022n$. Sannið að n hafi að minnsta kosti 2022 ólíka frumþætti.

Dæmi 18. Finnið allar tvenndir (a, b) af jákvæðum heiltölum þannig að $a \leq b$ og jafnan

$$\gcd(x, a) \gcd(x, b) = \gcd(x, 20) \gcd(x, 22)$$

gildi fyrir allar jákvæðar heiltölur x.

Dæmi 19. Finnið allar þrenndir (x, y, z) af heiltölum, sem eru stærri eða jafnar núll, þannig að

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Dæmi 20. Inga og Eiríkur eru að spila leik. Fyrir gefna oddafrumtölu p eru tölurnar $1, 2, 3, \ldots, p-1$ skrifaðar upp á töflu. Þau skiptast á að gera og Inga byrjar. Þegar leikmaður á leik þá strikar hann yfir eina af tölunum á töflunni sem hefur ekki verið strikað yfir. Eftir það er margfeldi talnanna sem strikað hefur yfir reiknað og ef það er 1 $\pmod{p}$ þá fær leikmaðurinn eitt stig en annars ekkert. Leikurinn endar eftir að strikað hefur verið yfir síðustu töluna.

Leikmaðurinn sem hefur flest stig í lok leiks vinnur. Ef báðir leikmenn hafa jafnmörg stig þá endar leikurinn með jafntefli. Ákvarðið fyrir hvert p, hvor leikmaðurinn (ef annar) hefur vinningsleið.