# Baltijos kelias

2022 m. lapkričio 12 d.

Version: *Lithuanian*

*Laikas sprendimui: 4 val. 30 min.*
*Klausimus galima užduoti per pirmąsias 30 minučių.*
*Leidžiama naudotis tik rašymo ir braižymo priemonėmis.*

**1.** Visų realiųjų teigiamų skaičių aibė žymima $\mathbb{R}^+$. Funkcijai $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ lygybės

$$f(x^3) = f(x)^3 \quad \text{ir} \quad f(2x) = f(x)$$

galioja su visais $x \in \mathbb{R}^+$. Raskite visas galimas skaičiaus $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$ reikšmes.

**2.** Tam tikrą natūraliųjų skaičių seką apibrėžia pradinės reikšmės $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ir rekurentusis sąryšis:

$$a_n = \left[\frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}}\right]$$

kiekvienam natūraliajam $n \geq 3$. Raskite sekos nario $a_{2022}$ reikšmę.

**3.** Dviejų kintamųjų daugianarį $P(x, y)$ vadinsime *užsislėpusiu vienkintamiu*, jei egzistuoja tokie daugianariai $Q(x)$ ir $R(x, y)$, kad $\deg(Q) \geq 2$ ir $P(x, y) = Q(R(x, y))$. Pavyzdžiui, daugianariai $x^2 + 1$ ir $x^2y^2 + 1$ yra užsislėpę vienkintamiai, o daugianaris $xy + 1$ nėra.

Įrodykite tokio teiginio teisingumą arba klaidingumą: jei kiekvienas iš daugianarių $P(x, y)$ ir $P(x, y) + 1$ yra dviejų daugianarių, nelygių konstantoms, sandauga, tai $P(x, y)$ yra užsislėpęs vienkintamis.

*Pastaba: visi čia nagrinėjami daugianariai yra daugianariai su realiaisiais koeficientais.*

**4.** Realieji teigiami skaičiai $x$, $y$ ir $z$ tenkina lygybę $xy + yz + zx = 1$. Įrodykite, kad

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

**5.** Visų realiųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{R}$. Nustatykite visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms $f(0) + 1 = f(1)$ ir

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3$$

su visais $x, y \in \mathbb{R}$.

**6.** Badmintono turnyre dalyvauja 40 žaidėjų. Jis vyksta 20 aikštelių, iš eilės sunumeruotų skaičiais nuo 1 iki 20. Žaidėjai paskirstomi po du žaidėjus į aikštelę. Kiekvieno turo metu kiekvienoje aikštelėje nustatomas laimėtojas. Tada žaidėjas, pralaimėjęs aikštelėje 1, ir žaidėjas, laimėjęs aikštelėje 20, lieka atitinkamose aikštelėse. Kiekvienas iš likusių 38 žaidėjų iš savo aikštelės $i$ pereina į aikštelę $i+1$, jei laimėjo, ir į aikštelę $i-1$, jei pralaimėjo. Turnyras tęsiasi, kol kiekvienas žaidėjas nesužaidžia bent po vieną kartą su kiekvienu kitu. Kiek mažiausiai turų gali trukti toks turnyras?

**7.** Rašytojas Artūras turi $n \geq 1$ bendraautorių, su kuriais yra parašęs bendrų knygų. Kiekviena tokia knyga turi autorių sąrašą, kuriame yra ir pats Artūras. Jokių dviejų tokių knygų autorių aibės nesutampa. Kiekvienas Artūro bendraautorius suskaičiavo, kiek tokių knygų parašė. Užrašius visus skaičius, gauti pirmieji $n$ Fibonačio skaičių (juos apibrėžia lygybės $F_1 = F_2 = 1$ ir $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). Kurioms skaičiaus $n$ reikšmėms yra įmanoma, kad joks Artūro bendraautorius neapsiriko skaičiuodamas?

**8.** Duoti natūralusis skaičius $n \geq 3$ ir $n$-kampis, kuris nebūtinai yra iškilasis (čia nagrinėjame tik savęs nekertančius daugiakampius). Šiame $n$-kampyje nubrėžtos $n-3$ vidinės įstrižainės, kurios dalija $n$-kampį į $n-2$ trikampius. Visi šių trikampių kampų didumai laipsniais yra natūralieji skaičiai, ir jokie du iš šių skaičių nėra lygūs. Nustatykite didžiausią galimą skaičiaus $n$ reikšmę.

**9.** Aplink didelį laužą sėdi penki išminčiai. Jie žino: rytoj ateis Jurgis ir kiekvienam išminčiui ant galvos uždės vienos iš keturių spalvų – raudoną, žalią, mėlyną arba geltoną – kepurę, o tada po apmąstymų kiekvienas išminčius turės užrašyti ant skiautės vieną iš tų keturių spalvų. Kiekvienas išminčius galės matyti tik dviejų jam gretimų išminčių kepurių spalvas, bet ne savo ir ne kitų dviejų išminčių. Be to, pasirodžius Jurgiui, išminčiams draudžiama bendrauti.

Įrodykite: išminčiai šiandien gali sugalvoti strategiją, kurią taikydami būtų garantuoti, kad savo kepurės spalvą rytoj užrašys ne daugiau nei du išminčiai.

**10.** Sakysime, kad natūralusis skaičius $a$ *slypi* natūraliajame skaičiuje $b$, jei skaičių $a$ galima gauti, ištrinant skaitmenis skaičiuje $b$ (nagrinėjamos tik dešimtainės skaičių išraiškos). Pavyzdžiui, skaičius 123 slypi skaičiuje 901523, bet ne skaičiuje 3412. Ar egzistuoja tokia begalinė natūraliųjų skaičių aibė, kad joks šios aibės skaičius neslypi jokiame kitame jos skaičiuje?

**11.** Apie trikampį $ABC$ apibrėžtas apskritimas $\Gamma$ su centru $O$. Apskritimas su centru, esančiu tiesėje $AB$, bei einantis per taškus $A$ ir $O$, kerta apskritimą $\Gamma$ taške $D \neq A$. Apskritimas su centru, esančiu tiesėje $AC$, bei einantis per taškus $A$ ir $O$, kerta apskritimą $\Gamma$ taške $E \neq A$. Įrodykite, kad tiesės $BD$ ir $CE$ lygiagrečios.

**12.** Smailiajame trikampyje $ABC$ išvestos aukštinės $AD$, $BE$, $CF$ (čia taškai $D$, $E$, $F$ atitinkamai yra kraštinėse $BC$, $CA$, $AB$). Pažymėtas atkarpos $AD$ vidaus taškas $Q$. Trikampių $QDF$ ir $QDE$ apibrėžtiniai apskritimai kerta tiesę $BC$ atitinkamai taškuose $X \neq D$ ir $Y \neq D$. Įrodykite, kad $BX = CY$.

**13.** Įbrėžtinio keturkampio $ABCD$ (čia $AB < BC$ ir $AD < DC$) kraštinėse $BC$ ir $CD$ atitinkamai pažymėti tokie taškai $E$ ir $F$, kad $AB = BE$ ir $AD = DF$. Taškas $M$ dalija atkarpą $EF$ pusiau. Įrodykite, kad $\angle BMD = 90°$.

**14.** Apie smailųjį trikampį $ABC$ apibrėžtas apskritimas $\Gamma$ su centru $O$. Taškas $M$ dalija atkarpą $BC$ pusiau. Apskritimas $\Gamma$ kerta tiesę $AM$ taške $T \neq A$, o tiesę, kurioje yra trikampio $ABC$ aukštinė iš viršūnės $A$, kerta taške $D \neq A$. Tiesės $DT$ ir $BC$ kertasi taške $X$. Apie trikampį $XDM$ apibrėžtas apskritimas su centru $P$. Įrodykite, kad trikampio $OPD$ apibrėžtinis apskritimas eina per atkarpos $XD$ vidurio tašką.

**15.** Duoti apskritimas $\Omega$ ir du jo skirtingi taškai $B$, $C$. Pasirinkus trečią apskritimo $\Omega$ tašką $A$, taškai $X$ ir $Y$ apibrėžiami kaip atitinkamai trikampio $ABC$ aukštinių iš viršūnių $B$ ir $C$ pagrindai. Įrodykite, kad egzistuoja apskritimas $\Gamma$, liečiantis tiesę $XY$ nepriklausomai nuo taško $A$ parinkimo.

**16.** Natūraliųjų skaičių aibė žymima $\mathbb{Z}^+$. Nustatykite visas funkcijas $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, kurioms

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

su visais $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

**17.** Natūraliojo skaičiaus $n$ visų teigiamų daliklių suma yra ne mažesnė nei $2022n$. Įrodykite, kad $n$ turi mažiausiai 2022 skirtingus pirminius daliklius.

**18.** Raskite visas tokias natūraliųjų skaičių poras $(a, b)$, kad $a \leq b$ ir lygybė

$$\mathrm{DBD}(x, a) \cdot \mathrm{DBD}(x, b) = \mathrm{DBD}(x, 20) \cdot \mathrm{DBD}(x, 22)$$

galioja su visais natūraliaisiais $x$.

**19.** Raskite visus tokius sveikųjų neneigiamų skaičių trejetus $(x, y, z)$, kad

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

**20.** Duotas pirminis nelyginis skaičius $p$. Lentoje užrašyti skaičiai $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Inga ir Irma žaidžia žaidimą, pakaitomis atlikdamos ėjimus. Pirmąjį ėjimą atlieka Inga. Ėjimo metu žaidėja turi pasirinkti vieną lentoje užrašytą, neišbrauktą skaičių ir išbraukti jį. Jei po žaidėjos ėjimo visų tuo metu išbrauktų skaičių sandauga lygsta 1 moduliu $p$, tai ta žaidėja gauna 1 tašką (priešingu atveju ji gauna 0 taškų).

Žaidimas baigiasi, išbraukus visus skaičius lentoje. Laimi žaidėja, žaidimo pabaigoje surinkusi daugiau taškų. Jei žaidimo pabaigoje žaidėjos turi po lygiai taškų, tai žaidimas baigiasi lygiosiomis. Kiekvienai skaičiaus $p$ galimai reikšmei nustatykite, ar kuri nors žaidėja turi pergalės strategiją, ir jei taip, tai kuri.