Baltic Way

2022. gada 12. novembris

Version: *Latvian*

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmajās 30 minūtēs.
Atļauts lietot tikai rakstāmpiederumus un zīmēšanas piederumus.

Uzdevums 1. Ar $\mathbb{R}^+$ apzīmēsim pozitīvo reālo skaitļu kopu. Funkcija $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ apmierina vienādojumus

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ un } f(2x) = f(x)$$

visiem $x \in \mathbb{R}^+$. Atrast visas iespējamās $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$ vērtības.

Uzdevums 2. Naturālu skaitļu virknei dotas sākuma vērtības $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ un to definē rekursija

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

katram $n \geq 3$. Atrast a_{2022} vērtību.

Uzdevums 3. Divu mainīgo polinomu $P(x,y)$ sauksim par *apslēpti viena mainīgā polinomu*, ja eksistē polinomi $Q(x)$ un $R(x,y)$, ka $\deg(Q) \geq 2$ un $P(x,y) = Q(R(x,y))$. Piemēram, x^2+1 un x^2y^2+1 ir apslēpti viena mainīgā polinomi, bet $xy+1$ nav.

Pierādīt vai apgāzt apgalvojumu: ja $P(x,y)$ ir tāds polinoms, ka gan $P(x,y)$, gan $P(x,y)+1$ var uzrakstīt kā divu nekonstantu polinomu reizinājumu, tad P ir apslēpti viena mainīgā polinoms.

Piezīme: tiek pieņemts, ka visi polinomi ir ar reāliem koeficientiem.

Uzdevums 4. Pozitīviem reāliem skaitļiem x, y un z izpildās $xy + yz + zx = 1$. Pierādīt, ka

$$2(x^2+y^2+z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

Uzdevums 5. Ar $\mathbb{R}$ apzīmēsim reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām $f(0)+1 = f(1)$ un visiem reāliem skaitļiem x un y izpildās

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3.$$

Uzdevums 6. Matīss organizē badmintona turnīru 40 spēlētajiem uz 20 laukumiem, kas sanumurēti no 1 līdz 20. Spēlētāji sadalās pa diviem uz laukuma, un katrā raundā uz katra laukuma viens spēlētājs vinnē, bet otrs - zaudē. Pēc raunda, uzvarējušais spēlētājs uz 20. laukuma un zaudējušais spēlētājs uz 1. laukuma paliek tajos pašos laukumos, bet visi pārējie 38 spēlētāji pārvietojas pēc šādiem noteikumiem: laukuma i uzvarētājs pārvietojas uz laukumu $i+1$, bet zaudētājs - uz laukumu $i-1$.

Matīss grib, lai katrs spēlētājs ar katru citu izspēlētu vismaz vienu raundu. Kāds ir mazākais raundu skaits, lai Matīsa vēlme būtu izpildāma?

Uzdevums 7. Rakstniekam Adrianam ir $n \geq 1$ līdzautori, kas kopā ar viņu ir rakstījuši grāmatas, bet nevienām divām grāmatām autoru kopas nesakrīt. Kādā ballītē katrs no viņa līdzautoriem pēc atmiņas uzrakstīja uz kartiņas skaitli, cik grāmatu viņš ir sarakstījis kopā ar Adrianu. Izrādījās, ka skaitļus uz kartiņām var sakārtot rindā tā, ka tie veido pirmos n Fibonači skaitļus ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$).

Kādiem n ir iespējams, ka neviens no līdzautoriem nav kļūdījies?

Uzdevums 8. Kādā n-stūrī (ne obligāti izliektā, bet kuram nekrustojas malas un $n \geq 3$) ir novilktas $n-3$ iekšējas diagonāles tā, ka n-stūris sadalīts $n-2$ trijstūros. Ir zināms, ka visas šajos trijstūros esošo leņķu vērtības (grādos) ir dažādi naturāli skaitļi.

Kāda ir lielākā n vērtība, kurai tas ir iespējams?

Uzdevums 9. Pieci vecajie sēž ap lielu ugunskuru. Viņi zina, ka drīz atnāks Alfrēds un katram no tiem tiem uzvilks galvā cepuri vienā no četrām krāsām (sarkanu, zaļu, zilu vai dzeltenu) tā, ka katrs no viņiem var redzēt krāsu tikai tām cepurēm, kas uzvilktas galvā diviem viņa kaimiņiem (ne savu un ne to, kuri sēž pretī aiz ugunskura). Pēc pārdomu brīža viņiem katram vajadzēs nesazinoties uzrakstīt vienu no šīm četrām krāsām uz lapiņas.

Viņi ļoti gribētu, lai ne vairāk kā divi no viņiem būtu uzrakstījuši krāsu, kas sakrīt ar viņa paša cepures krāsu. Pierādīt, ka viņi var vienoties par stratēģiju, kā to garantēti izdarīt.

Uzdevums 10. Teiksim, ka naturāls skaitlis b *satur* skaitli a, ja a var iegūt, no b decimālā pieraksta izdzēšot kādus ciparus. Piemēram, 901523 satur 123, bet 3412 nesatur 123.

Vai eksistē tāda bezgalīga naturālu skaitļu kopa, kurā neviens skaitlis nesatur nevienu citu šīs kopas skaitli?

Baltic Way

2022. gada 12. novembris

Version: *Latvian*

Uzdevums 11. Dots trijstūris ABC. Apzīmēsim tā apvilkto riņķa līniju ar Γ un tās centru ar O. Riņķa līnija, kuras centrs atrodas uz taisnes AB un kas iet caur punktiem A un O, otru reizi krusto Γ punktā D. Analoģiski, riņķa līnija, kuras centrs atrodas uz taisnes AC un kas iet caur punktiem A un O, otru reizi krusto Γ punktā E.

Pierādīt, ka taisne BD ir paralēla CE.

Uzdevums 12. Šaurleņķu trijstūrī ABC doti augstumi AD, BE un CF (kur D, E un F attiecīgi atrodas uz malām BC, CA and AB). Punkts Q ir nogriežņa AD iekšējs punkts, un trijstūru QDF un QDE apvilktās riņķa līnijas otru reizi krusto taisni BC attiecīgi punktos X un Y.

Pierādīt, ka $BX = CY$.

Uzdevums 13. Dots četrstūris $ABCD$, kas ievilkts riņķa līnijā un kam $AB < BC$ un $AD < DC$. Punkti E un F atrodas attiecīgi uz malām BC un CD, pie tam $AB = BE$ un $AD = DF$. Ar M apzīmēsim nogriežņa EF viduspunktu.

Pierādīt, ka $\angle BMD = 90°$.

Uzdevums 14. Ar Γ apzīmēsim apvilkto riņķa līniju un ar O apvilktās riņķa līnijas centru šaurleņķu trijstūrim ABC, un ar M apzīmēsim nogriežņa BC viduspunktu.

Ar T apzīmēsim Γ un taisnes AM otru krustpunktu, un ar D apzīmēsim Γ un augstuma no A otru krustpunktu. Papildus ar X apzīmēsim taišņu DT un BC krustpunktu. Ar P apzīmēsim trijstūra XDM apvilktās riņķa līnijas centru.

Pierādīt, ka trijstūra OPD apvilktā riņķa līnija iet caur nogriežņa XD viduspunktu.

Uzdevums 15. Dota riņķa līnija Ω, un $B \neq C$ ir divi fiksēti punkti uz tās. Punktam A uz Ω ar X un Y attiecīgi apzīmēsim trijstūrī ABC no virsotnēm B un C vilkto augstumu pamatus.

Pierādīt, ka eksistē tāda riņķa līnija Γ, ka XY ir Γ pieskare neatkarīgi no punkta A izvēles.

Uzdevums 16. Ar $\mathbb{Z}^+$ apzīmēsim naturālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, kuras apmierina

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

visiem $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Uzdevums 17. Naturāla skaitļa n pozitīvo dalītāju summa ir vismaz $2022n$. Pierādīt, ka n ir vismaz 2022 dažādi pirmreizinātāji.

Uzdevums 18. Atrast visus naturālu skaitļu pārus (a, b), kuriem $a \le b$ un

$$\gcd(x, a) \gcd(x, b) = \gcd(x, 20) \gcd(x, 22)$$

izpildās katram naturālam skaitlim x.

Uzdevums 19. Atrast visus nenegatīvu veselu skaitļu trijniekus (x, y, z), kuriem izpildās

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Uzdevums 20. Ramona un Ansis spēlē spēli. Dots nepāra pirmskaitlis p, un uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus, un Ramona iet pirmā. Gājienā spēlētājs apvelk kādu no vēl neapvilktiem skaitļiem uz tāfeles. Ja pēc gājiena visu apvilkto skaitļu reizinājums ir $1 \pmod p$, tad spēlētājs, kurš veica šo gājienu, saņem vienu punktu, ja nē – punkti netiek piešķirti. Spēle beidzas, kad visi skaitļi ir apvilkti.

Spēlētājs, kurš saņēmis vairāk punktu, spēles beigās ir uzvarējis. Ja abiem spēlētajiem ir vienāds punktu skaits – spēle ir beigusies neizšķirti. Katram p noskaidrot, kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija šajā spēlē (ja tāda ir).