Baltic Way

12. november 2022

Version: *Norwegian*

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter.
Spørsmål kan stilles de første 30 minuttene av konkurransen.
Kun skrive- og tegneredskaper er tillatt.

Oppgave 1. La $\mathbb{R}_{>0}$ være mengden av alle positive reelle tall. Anta at $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ er en funksjon som tilfredsstiller likningene

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ og } f(2x) = f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Bestem alle mulige verdier av $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$.

Oppgave 2. Vi definerer en følge av positive heltall ved initialverdiene $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ og rekursjonen

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

for alle $n \geq 3$. Bestem verdien av a_{2022}.

Oppgave 3. Vi kaller et polynom $P(x, y)$ i to variabler *forkledd enkeltvariabelt*, hvis det eksisterer polynomer $Q(x)$ og $R(x, y)$ slik at $\deg(Q) \geq 2$ og $P(x, y) = Q(R(x, y))$ (e.g. $x^2 + 1$ og $x^2y^2 + 1$ er forkledd enkeltvariable, mens $xy + 1$ ikke er det).

Bevis eller motbevis følgende utsagn: Gitt at $P(x, y)$ er et polynom slik at både $P(x, y)$ og $P(x, y) + 1$ kan skrives som et produkt av to ikke-konstante polynomer, så følger det at $P(x, y)$ er forkledd enkeltvariabelt.

Merk at alle polynomer er antatt å ha reelle koeffisienter.

Oppgave 4. De positive reelle tallene x, y og z tilfredsstiller $xy + yz + zx = 1$. Bevis at

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

Oppgave 5. La $\mathbb{R}$ være mengden av alle reelle tall. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $f(0) + 1 = f(1)$, og for alle reelle x og y så tilfredsstiller f likningen

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3.$$

Oppgave 6. Niels arrangerer en bordtennisturnering med 40 deltagere fordelt på 20 bord nummerert fra 1 til 20, med nøyaktig 2 spilllere ved hvert bord. I hver runde vil det ved hvert bord være én vinner og én taper. Taperen ved bord 1 og vinneren ved bord 20 forblir ved sitt bord ved rundens slutt. For de 38 andre deltagerne beveger vinneren ved bord i seg til bord $i + 1$, mens taperen beveger seg til bord $i - 1$. Turnerningen blir avgjort når alle deltagerne har spilt mot alle de andre minst én gang. Hva er det minste antallet runder turneringen kan ha?

Oppgave 7. Forfatteren Arthur har $n \geq 1$ kolleger som han skriver bøker sammen med. Forfatterlistene til Arthur sine bøker er unike, samt en undermengde av forfatterne. I et selskap med alle hans kolleger skriver hver kollega en lapp med antallet bøker de kan huske å ha skrevet sammen med ham. Når Arthur leser lappene oppdager han at de nedskrevne tallene er de n første Fibonaccitallene (definert ved $F_1 = F_2 = 1$ og $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). For hvilke n er det mulig at ingen av forfatterne husket feil antall bøker?

Oppgave 8. For et positivt heltall $n \geq 3$, tegner vi $n - 3$ innvendige diagonaler i en ikke-selvskjærende, men ikke nødvendigvis konveks, n-kant, som deler n-kanten inn i $n - 2$ trekanter. Det viser seg at alle de $3n - 6$ vinklene (i grader) er heltallige og unike. Hva er den største mulige verdien av n?

Oppgave 9. Fem vikinger sitter rundt en stor tønne med mjød. De vet at Odin kommer til å plassere en hjelm i en av fire farger (rød, grønn, blå eller gul) på hodet til hver viking. Etter en kort periode med stillferdig refleksjon skal hver viking skrive ned én av de fire fargene på et stykke dyreskinn. Hver viking kan se fargen på hjelmene til de to vikingene han sitter ved siden av, men ikke fargen på hjelmene til vikingene på motsatt side av tønna og heller ikke sin egen. De kan heller ikke kommunisere etter at Odin har begynt å plassere hjelmene.

Vis at vikingene i forkant kan finne en strategi slik at maksimalt to vikinger skriver ned fargen på sin egen hjelm.

Oppgave 10. Et positivt heltall a er *inneholdt* i det positive heltallet b hvis man kan få tallet a ved å slette noen av sifrene i tallet b (i deres desimalrepresentasjon). For eksempel er 123 inneholdt i 901523, men ikke i 3412.

Eksisterer det en uendelig mengde av positive heltall slik at intet tall i mengden er inneholdt i noe annet tall i mengden?

Oppgave 11. La ABC være en trekant med omsirkel Γ og omsenter O. Sirkelen med sentrum på linja AB som passerer gjennom punktene A and O skjærer Γ igjen i D. Tilsvarende vil sirkelen med sentrum på linja AC som passerer gjennom A og O skjære Γ igjen i E. Vis at BD er parallell med CE.

Oppgave 12. Linjestykkene AD, BE og CF er høyder i den spissvinklet trekanten ABC (der D, E og F ligger på sidene BC, CA og AB). La Q være et innvendig punkt på linjestykket AD, og la omsirklene til trekantene QDE and QDF skjære linja BC igjen i punktene X and Y. Vis at $BX = CY$.

Oppgave 13. La $ABCD$ være en syklisk firkant der $AB < BC$ og $AD < DC$. La E og F være punkter på sidene BC og CD, slik at $AB = BE$ og $AD = DF$. La M være midtpunktet på linjestykket EF. Vis at vinkelen $\angle BMD$ er rett.

Oppgave 14. La Γ være omsirkelen og O omsenteret til den spissvinklede trekanten ABC. Definer M som midtpunktet på linjestykket BC og T som det andre skjæringspunktet mellom Γ og linjen AM. Punktet D er det andre skjæringspunktet mellom Γ og normalen fra A felt ned på BC, og X er skjæringspunktet mellom linjene DT og BC. La P være omsenteret til trekanten XDM. Vis at midtpunktet på XD ligger på omsirkelen til trekanten OPD.

Oppgave 15. La Ω være en sirkel og $B \neq C$ to fikserte punkter på Ω. Punktet A varierer på Ω, og vi definerer punktene X og Y som projeksjonene av B og C på sidene AC og AB i trekanten ABC. Vis at det finnes en sirkel Γ slik at XY tangerer Γ uavhengig av plasseringen til punktet A.

Oppgave 16. La $\mathbb{Z}_{>0}$ være mengden av alle positive heltall. Finn alle funksjoner $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ som tilfredsstiller

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

for alle $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Oppgave 17. Let n være et positivt heltall hvis positive divisorer summerer til minst $2022n$. Vis at n har minst 2022 ulike primtallsdivisorer.

Oppgave 18. Finn alle par (a, b) av positive heltall slik at $a \leq b$ og likheten

$$\gcd(x, a)\gcd(x, b) = \gcd(x, 20)\gcd(x, 22)$$

er tilfredsstilt for alle positive heltall x.

Oppgave 19. Finn alle tripler (x, y, z) av ikke-negative heltall slik at

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Oppgave 20. Andreas og Christoffer leker en lek der tallene $1, 2, \ldots, p-1$ er skrevet på en tavle. De gjør annethvert trekk og Andreas begynner. Et trekk består av å krysse ut et tall på tavlen som ikke allerede er utkrysset. Hvis produktet av alle de utkryssede tallene er kongruent med 1 modulo p så vil den som krysset ut tallet motta ett poeng, ellers blir ingen poeng utdelt. Leken er over etter at alle tallene på tavlen er blitt krysset ut og poengene utdelt.

Den som har høyest poengsum vinner, og hvis begge har lik poengsum blir leken uavgjort. For hvert odde primtall p, avgjør hvem (hvis noen) som har en vinnende strategi.