Tromsø
Romsa
Baltic Way 2022

Bałtycki Szlak

12 listopada 2022

Version: *Polish*

Czas trwania: 4 godziny 30 minut.
Podczas początkowych 30 minut można zadawać pytania.
Dozwolone są jedynie przybory do pisania i rysowania.

Zadanie 1. Niech $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb rzeczywistych. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spełniająca równania

$$f(x^3) = f(x)^3 \quad \text{oraz} \quad f(2x) = f(x)$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^+$. Znaleźć wszystkie możliwe wartości wyrażenia $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$.

Zadanie 2. Definiujemy ciąg liczb naturalnych o początkowych wyrazach $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ poprzez rekurencję

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

dla każdego $n \geqslant 3$. Znaleźć wartość a_{2022}.

Zadanie 3. Wielomian dwóch zmiennych $P(x, y)$ nazywamy *sekretnie jednej zmiennej*, jeśli istnieją takie wielomiany $Q(x)$ oraz $R(x, y)$, że $\deg(Q) \geqslant 2$ oraz $P(x, y) = Q(R(x, y))$ (np. $x^2 + 1$ oraz $x^2y^2 + 1$ są sekretnie jednej zmiennej, zaś $xy + 1$ nie jest).

Udowodnić lub obalić następujące stwierdzenie: Jeśli $P(x, y)$ jest takim wielomianem, że zarówno $P(x, y)$, jak i $P(x, y) + 1$ mogą być przedstawione w postaci iloczynu dwóch niestałych wielomianów, to P jest sekretnie jednej zmiennej.

Uwaga: Zakładamy, że wszystkie wielomiany mają współczynniki rzeczywiste.

Zadanie 4. Dodatnie liczby rzeczywiste x, y oraz z spełniają $xy + yz + zx = 1$. Udowodnić, że

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geqslant 5.$$

Zadanie 5. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $f(0) + 1 = f(1)$ oraz dla każdej pary liczb rzeczywistych (x, y) spełniona jest zależność

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3.$$

Zadanie 6. Mattis jest gospodarzem turnieju badmintona dla 40 graczy na 20 kortach ponumerowanych od 1 do 20. Gracze są podzieleni po dwóch na jeden kort. W każdej rundzie na każdym korcie musi zostać wyłoniony zwycięzca. Następnie przegrany na korcie 1 oraz zwycięzca na korcie 20 zostają na swoich miejscach. Pozostałych 38 graczy przemieszcza się następująco: zwycięzca na korcie i przechodzi na kort $i + 1$, natomiast przegrany na korcie i przechodzi na kort $i-1$. Turniej przebiega do czasu, gdy każdy gracz zagra z każdym innym przynajmniej raz. Jaka jest minimalna liczba rund, które muszą być rozegrane?

Zadanie 7. Pisarz Arthur ma $n \geqslant 1$ przyjaciół, którzy piszą z nim książki. Każda książka ma zbiór autorów zawierający także Arthura, przy czym żadne dwie nie mają takiego samego zbioru autorów. Na przyjęciu każdy z przyjaciół zapisał na karteczce (według swojej pamięci) liczbę książek, które napisał razem z Arthurem. Przyglądając się wszystkim liczbom odkryli, że tworzą one ciąg Fibonacciego (ciąg zdefiniowany przez $F_1 = F_2 = 1$ oraz $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). Dla jakich n jest możliwe, że żaden z jego przyjaciół nie miał luk w pamięci.

Zadanie 8. Niech n będzie liczbą naturalną oraz $n \geqslant 3$. Wewnątrz n-kąta (niekoniecznie wypukłego, ale bez samoprzecięć) poprowadzono $n-3$ przekątne wewnętrzne, dzieląc go na $n-2$ trójkąty. Wiemy, że wszystkie kąty w tych trójkątach mają miary (w stopniach) wyrażone liczbami naturalnymi. Ponadto, żadne dwa spośród wszystkich rozważanych kątów nie są równe. Jaka jest największa możliwa wartość n?

Zadanie 9. Pięciu starców siedzi dookoła ogromnego ogniska. Wiedzą, że za chwilę Oluf założy na głowę każdego z nich czapkę w jednym z czterech kolorów (czerwoną, zieloną, niebieską lub żółtą). Następnie, po chwili namysłu w ciszy, każdy ze starców musi napisać na kartce jeden z tych kolorów. Każdy starzec będzie widział kolor czapki swoich dwóch sąsiadów, jednak nie będzie znał, ani swojego koloru, ani koloru pozostałych dwóch osób. Ponadto, po założeniu czapek na głowę starcy nie będą mogli się między sobą komunikować.

Pokazać, że starcy mogą, przed przyjściem Olufa, ustalić taką strategię, że co najwyżej dwóch z nich napisze na kartce kolor swojej czapki.

Zadanie 10. Liczbę naturalną a nazwiemy *zawartą* w liczbie naturalnej b jeśli może ona powstać poprzez wymazanie niektórych cyfr liczby b (w zapisie dziesiętnym). Na przykład, 123 jest zawarta w 901523, ale nie jest zawarta w 3412.

Rozstrzygnąć, czy istnieje taki nieskończony zbiór liczb naturalnych, że żaden jego element nie jest zawarty w innym.

Zadanie 11. Dany jest okrąg Γ o środku w O opisany na trójkącie ABC. Okrąg o środku na prostej AB przechodzący przez A i O przecina Γ ponownie w D. Analogicznie, okrag o środku na prostej AC przechodzący przez A i O przecina Γ ponownie w E. Udowodnić, że BD jest równoległe do CE.

Zadanie 12. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym o wysokościach AD, BE i CF (gdzie D, E i F leżą na bokach odpowiednio BC, CA i AB). Punkt Q leży we wnętrzu odcinka AD. Okręgi opisane na trójkątach QDF i QDE przecinają ponownie prostą BC odpowiednio w X i Y. Udowodnić, że $BX = CY$.

Zadanie 13. Czworokąt cykliczny $ABCD$ spełnia $AB < BC$ oraz $AD < DC$. Niech E i F będą takimi punktami na bokach odpowiednio BC i CD, że $AB = BE$ i $AD = DF$. Dalej, niech M będzie środkiem odcinka EF. Udowodnić, że $\sphericalangle BMD = 90°$.

Zadanie 14. Niech Γ będzie okręgiem o środku w O opisanym na trójkącie ostrokątnym ABC. Dalej, niech M będzie środkiem BC, punkt T drugim przecięciem Γ z prostą AM oraz punkt D drugim przecięciem Γ z wysokością opuszczoną z wierzchołka A. Ponadto, niech X będzie przecięciem prostych DT i BC. Punkt P to środek okręgu opisanego na trójkącie XDM. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie OPD przechodzi przez środek odcinka XD.

Zadanie 15. Ustalmy okrąg Ω oraz punkty $B \neq C$ leżące na nim. Niech A leży na Ω oraz niech punkty X i Y będą spodkami wysokości odpowiednio z B i C w trójkącie ABC. Udowodnić, że istnieje taki okrag Γ, że XY jest styczne do Γ niezależnie od wyboru punktu A.

Zadanie 16. Niech $\mathbb{Z}^+$ oznacza zbiór dodatnich liczb całkowitych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ spełniające zależność

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

dla każdych $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Zadanie 17. Niech n będzie taką dodatnią liczbą całkowitą, że suma jej dodatnich dzielników wynosi co najmniej $2022n$. Udowodnić, że n posiada co najmniej 2022 różne dzielniki pierwsze.

Zadanie 18. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że $a \leqslant b$ oraz

$$\mathrm{NWD}(x, a)\,\mathrm{NWD}(x, b) = \mathrm{NWD}(x, 20)\,\mathrm{NWD}(x, 22)$$

zachodzi dla każdej dodatniej liczby całkowitej x.

Zadanie 19. Znaleźć wszystkie takie trójki (x, y, z) nieujemnych liczb całkowitych, że

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Zadanie 20. Ingrid i Erik grają w następującą grę. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą, na tablicy zostały zapisane liczby $1, 2, 3, \ldots, p-1$. Gracze wykonują ruchy naprzemiennie, Ingrid zaczyna. Ruch składa się z wykreślenia jednej z liczb na tablicy. Wykreślane mogą być tylko te liczby, które jeszcze nie zostały wykreślone. Jeśli po ruchu danego gracza iloczyn wszystkich dotychczas wykreślonych liczb wynosi $1 \pmod{p}$, to gracz ten otrzymuje jeden punkt, w przeciwnym wypadku punkty nie są przyznane. Gra kończy się gdy wszystkie liczby na tablicy zostaną wykreślone.

Wygrywa gracz, który na koniec gry zgromadzi więcej punktów. Jeżeli oboje z graczy mają na koniec taką samą liczbę punktów, gra kończy się remisem. Dla każdego p wyznaczyć, który z graczy (jeśli taki istnieje) posiada strategię wygrywającą.