Baltic Way

12 november 2022

Version: *Swedish*

Tillåten tävlingstid: 4 timmar och 30 minuter.
Frågor får ställas under första halvtimmen.
Endast rit- och skrivdon är tillåtna hjälpmedel.

Problem 1. Låt $\mathbb{R}^+$ beteckna mängden av positiva reella tal. Antag att $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ är en funktion som uppfyller ekvationerna

$$f(x^3) = f(x)^3 \text{ och } f(2x) = f(x)$$

för alla $x \in \mathbb{R}^+$. Bestäm alla möjliga värden som $f\left(\sqrt[2022]{2}\right)$ kan anta.

Problem 2. Vi definierar en följd av naturliga tal genom begynnelsevärdena $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ och rekursionen

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

för alla $n \geq 3$. Bestäm a_{2022}.

Problem 3. Vi kallar ett polynom $P(x, y)$ i två variabler *förrädiskt envariabligt* om det existerar polynom $Q(x)$ och $R(x, y)$ sådana att $\deg(Q) \geq 2$ och $P(x, y) = Q(R(x, y))$ (t.ex. är $x^2 + 1$ och $x^2y^2 + 1$ förrädiskt envariabliga, medan $xy + 1$ inte är det).

Bevisa eller motbevisa följande påstående: om $P(x, y)$ är ett polynom sådant att både $P(x, y)$ och $P(x, y) + 1$ kan skrivas som en produkt av två icke-konstanta polynom, så är P förrädiskt envariabligt.

Anmärkning: Alla polynom antags ha reella koefficienter.

Problem 4. De positiva reella talen x, y och z uppfyller $xy + yz + zx = 1$. Bevisa att

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1}\right) \geq 5.$$

Problem 5. Låt $\mathbb{R}$ beteckna mängden av reella tal. Finn alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att $f(0) + 1 = f(1)$ och

$$f(xy - x) + f(x + f(y)) = yf(x) + 3.$$

för alla reella tal x och y.

Problem 6. Isbjörnen Sven arrangerar en snöbollskrigsturnering mellan 40 älgar. Krigen utkämpas på 20 olika snötäckta gator, numrerade från 1 till 20. I början sprids älgarna ut på de 20 gatorna så att det är två älgar på varje gata. I en runda koras en vinnande älg på varje gata. Därefter stannar älgen som förlorade på gata nummer 1 och älgen som vann på gata nummer 20 på sina respektive gator. De resterande 38 älgarna flyttar alla till en intilliggande gata, så att vinnarna flyttar sig från gata i till gata $i + 1$ medan förlorarna flyttar sig från gata i till gata $i - 1$. Turneringen fortsätter tills alla älgar utkämpat ett snöbollskrig mot varje annan älg minst en gång. Vilket är det minsta antalet rundor som en turnering kan pågå?

Problem 7. Kungskobran Sir Väs har $n \geq 1$ ormpolare som han brukar bjuda på ätparty då och då. När Sir Väs rymde från Skansen träffades alla hans ormpolare, och de kom fram till att Sir Väs aldrig bjudit in samma uppsättning ormpolare två gånger. Dessutom räknade de fram att polare nummer k blivit inbjuden till exakt F_k av Sir Väs partyn, där F_k är det k:te Fibonaccitalet (som definieras av $F_1 = F_2 = 1$ och $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$). För vilka n är det möjligt att ormpolarna inte räknat fel?

Problem 8. Låt $n \geq 3$ vara antalet hörn i en (inte nödvändigtvis konvex) n-hörning som inte skär sig själv. Vi drar $n-3$ inre diagonaler i n-hörningen, så att den delas i $n-2$ trianglar. Det visar sig att var och en av vinklarna i dessa trianglar uppmäter ett helt antal grader och att gradtalen är parvis olika. Vilket är det största möjliga värdet på n?

Problem 9. Fem kloka gamla gubbar sitter kring en stor snögubbe. De vet att isbjörnen Sven kommer placera en hatt med en av fyra färger (röd, grön, blå eller gul) på varje gubbes hjässa (snögubben undantagen), och att varje gubbe efter en kort tids stillsam eftertanke måste hugga in en av de fyra tillåtna färgerna på varsin runsten. De gamla gubbarna ser färgen på sina två grannars hattar, men inte färgen på sin egen eller de två återstående gubbarnas hattar. De kan inte heller kommunicera efter att Sven börjat placera hattar på deras hjässor.

Visa att de gamla gubbarna kan komma överens om en strategi i förväg sådan att som mest två av dem hugger in sin egen hatts färg på sin runsten.

Problem 10. Ett naturligt tal a sägs vara *inlindat* i det naturliga talet b om det är möjligt att sudda ut några av siffrorna i b så att a erhålls (när båda talen är i skrivna i decimalform). Till exempel är 123 inlindat i 901523, men inte inlindat i 3412.

Existerar det en oändlig mängd naturliga tal sådan att inget tal i mängden är inlindat i något annat tal i mängden?

Problem 11. Låt ABC vara en triangel med omskriven cirkel Γ, och låt O vara medelpunkten i Γ. Cirkeln med medelpunkt på linjen AB som går genom punkterna A och O skär Γ igen i punkten D. Cirkeln med medelpunkt på linjen AC som går genom punkterna A och O skär Γ igen i punkten E. Visa att BD är parallell med CE.

Problem 12. En spetsvinklig triangel ABC har höjder AD, BE och CF (där D, E och F ligger på sidorna BC, CA respektive AB). Låt Q vara en inre punkt på segmentet AD, och låt de omskrivna cirklarna till trianglarna QDF och QDE skära linjen BC igen i punkterna X respektive Y. Visa att $BX = CY$.

Problem 13. Låt $ABCD$ vara en cyklisk fyrhörning sådan att $AB < BC$ och $AD < DC$. Låt E och F vara punkter på sidorna BC respektive CD sådana att $AB = BE$ och $AD = DF$. Låt M vara mittpunkten på segmentet EF. Visa att $\angle BMD = 90°$.

Problem 14. Låt Γ vara den omskrivna cirkeln till den spetsvinkliga triangeln ABC, låt O vara medelpunkt i Γ och låt M vara mittpunkt på segmentet BC.

Låt T vara den andra skärningspunkten mellan Γ och linjen AM, och D den andra skärningspunkten mellan Γ och höjden från A. Låt vidare X vara skärningspunkten mellan linjerna DT och BC. Låt den omskrivna cirkeln till triangeln XDM ha medelpunkt P. Visa att den omskrivna cirkeln till triangeln OPD skär segmentet XD i dess mittpunkt.

Problem 15. Låt Ω vara en cirkel och $B \neq C$ två punkter på Ω. Givet en tredje punkt A på Ω, låt X och Y vara fotpunkter till höjderna från B respektive C i triangeln ABC. Visa att det existerar en cirkel Γ sådan att XY tangerar Γ oavsett var på cirkeln punkten A ligger.

Problem 16. Låt $\mathbb{Z}^+$ beteckna mängden av positiva heltal. Finn alla funktioner $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ som uppfyller

$$f(a) + f(b) \mid (a+b)^2$$

för alla $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

Problem 17. Låt n vara ett positivt heltal sådant att summan av dess positiva delare är minst $2022n$. Visa att n har åtminstone 2022 olika primtalsdelare.

Problem 18. Finn alla par av positiva heltal (a, b) sådana att $a \leq b$ och

$$\gcd(x, a)\gcd(x, b) = \gcd(x, 20)\gcd(x, 22)$$

för alla positiva heltal x.

Problem 19. Finn alla tripplar av icke-negativa heltal (x, y, z) sådana att

$$x^5 + x^4 + 1 = 3^y 7^z.$$

Problem 20. Victor och Jana spelar ett spel. För ett givet udda primtal p skrivs talen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ på svarta tavlan. Spelarna turas om att göra ett drag, och Victor börjar. I ett drag ringar en av spelarna in ett tal som ännu inte blivit inringat. Om produkten av alla inringade tal är $1 \pmod p$ efter draget så får spelaren som just ringade in ett tal en poäng, annars delas inga poäng ut. Spelet avslutas då alla tal ringats in.

Spelaren med flest poäng vid spelets slut vinner. Om båda spelare har samma poäng vid spelets slut blir det oavgjort. Bestäm för varje p vilken spelare (om någon) som har en vinnande strategi.